

Многочлены с одной переменной

Многочлены получаются из чисел и переменных, если их складывать, вычитать и умножать. Раскрывая скобки, каждый многочлен можно преобразовать в сумму *одночленов* (произведений чисел и переменных), после чего привести *подобные* члены (отличающиеся лишь числовыми *коэффициентами*).

Если многочлен содержит только одну переменную, его обычно записывают в порядке убывания степеней: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Числа a_n, \dots, a_0 называют *коэффициентами* многочлена; при этом (если $a_n \neq 0$) число n называют *степенью* многочлена, a_n – *старшим коэффициентом*, a_0 – *свободным членом*.

Многочлен с одной переменной x обозначают $P(x)$, $Q(x)$ и т.п. Если подставить вместо переменной число a , то получится число, которое обозначают $P(a)$, $Q(a)$ и т.п. Если $P(a) = 0$, то a называют *корнем* многочлена P .

Для усвоения темы полезно решить следующие задачи.

1. (а) Многочлен $P(x)$ имеет степень 5, а многочлен $Q(x)$ имеет степень 7. Что можно сказать про степени многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$? **(б)** Тот же вопрос, если степени обоих многочленов равны 7.

2. (а) Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют старшие коэффициенты 5 и 7. Что можно сказать про старшие коэффициенты многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$? **(б)** Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют свободные члены 5 и 7. Что можно сказать про свободные члены многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$?

3. Каждый из многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ содержит по два (ненулевых) члена. Сколько ненулевых членов может быть в их произведении? Укажите все варианты.

4. (а) Число $P(0)$ – свободный член многочлена P . Запишите аналогичным образом сумму коэффициентов многочлена P . **(б)** Сумма коэффициентов многочлена $P(x)$ равна 5, а сумма коэффициентов многочлена $Q(x)$ равна 7. Что можно сказать про сумму коэффициентов многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$?

5. Произвольный многочлен $P(x)$ умножили на $x - 1$. Могут ли у получившегося многочлена все коэффициенты быть положительными?

6. У многочлена $P(x)$ сумма коэффициентов при чётных степенях равна сумме коэффициентов при нечётных степенях. Многочлен $Q(x)$ также обладает таким свойством. Можно ли утверждать, что это свойство выполнено для многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$? А если про коэффициенты многочлена Q ничего не известно?

7. (а) Найдите многочлен второй степени, имеющий корни 1 и 2. **(б)** Найдите многочлен третьей степени, имеющий корни 1, 2 и 3.

8. Докажите, что корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ при $a \neq 0$ и $c \neq 0$ можно найти по формуле

$$x_{1,2} = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Применима ли эта формула, если одно из чисел a и c равно нулю?

10. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют целые коэффициенты, причём каждый из них имеет хотя бы один нечётный коэффициент. Докажите, что у произведения $P(x)Q(x)$ также есть хотя бы один нечётный коэффициент.

12. Все коэффициенты многочлена – целые числа в диапазоне от -9 до 9 . Докажите, что он не может иметь корня, большего 10 .

13. Найдите коэффициент при ab^2c^3 в многочлене $(a+b+c)^6$.

Выполните следующее контрольное задание

1. Обозначим через $P(Q(x))$ многочлен, который получится, если в $P(x)$ вместо x подставить $Q(x)$. (Например, если $P(x) = x^2$, а $Q(x) = x+1$, то $P(Q(x)) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, а $Q(P(x)) = x^2 + 1$.) Каковы степени многочленов $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$, если степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны m и n соответственно?

2. (а) Найдите многочлен $P(x)$, для которого $P(x+1) - P(x) = x$ при всех x . Как с его помощью вычислить сумму $1 + 2 + 3 + \dots + n$? **(б)** Найдите многочлен $P(x)$, для которого $P(x+1) - P(x) = x^2$. **(в)** Вычислите сумму $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.

3. Многочлен $P(x)$ принимает только неотрицательные значения. Докажите, что его степень чётна.

4. (а) Докажите тождество $P(x) - 2P(x+1) + P(x+2) = 0$ для любого многочлена $P(x)$ первой степени. **(б)** Докажите тождество $P(x) - 3P(x+1) + 3P(x+2) - P(x+3) = 0$ для любого многочлена $P(x)$ степени не выше 2 . **(в)** Сформулируйте и докажите аналогичные тождества для многочленов бóльших степеней.

5. Докажите, что в произведении

$$(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{10})(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10})$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов не останется нечётных степеней.

6. Найдите наибольший коэффициент многочлена $(a+b)^{10}$.

7. (Продолжение) Найдите сумму всех его коэффициентов.

8*. Найдите наибольший коэффициент многочлена $(a+2b)^{10}$.

9*. (Продолжение) Найдите сумму всех его коэффициентов.

10*. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена $(a+b-c)^{10}$.

11*. (Продолжение) Найдите сумму коэффициентов при одночленах, не содержащих a .

12*. (Продолжение) Найдите сумму коэффициентов при одночленах, содержащих b .